

# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

## ETAPA LOCALĂ

### SUCEAVA

18 februarie 2023

### CLASA a IX-a

1. (7p) Demonstrați că ecuația  $x^2 + px + q = 0$  nu are soluții raționale dacă  $p$  și  $q$  sunt numere întregi impare.
2. (7p) Dacă numerele reale  $a, b, c$  sunt lungimile laturilor unui triunghi  $ABC$  și verifică egalitatea  $a^3 + b^3 + c^3 = ab(a+b) - bc(b+c) + ca(c+a)$ , demonstrați că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic.
3. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(b_n)_{n \geq 1}$  două șiruri de numere reale definite prin  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n^2 - 3n + 4}$  și  $b_n = [a_n]$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . ( $[\alpha]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $\alpha$ ).
- a) (2p) Arătați că  $2^{n+1} > 4n - 5$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .
- b) (5p) Arătați că  $b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = 2046$ .
4. (7p) Fie  $O$  intersecția diagonalelor patrulaterului convex  $ABCD$ ,  $M$  un punct de pe latura  $(AB)$  și  $N$  un punct de pe latura  $(CD)$ . Să se arate că punctele  $O, M$  și  $N$  sunt coliniare dacă și numai dacă  $AM \cdot DN \cdot OB \cdot OC = BM \cdot CN \cdot OA \cdot OD$ .

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.